TD n°3: Intégration et théorie de Cauchy

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un † sont à faire en priorité, ceux marqués d'un † sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Formule de Stokes

Exercice 1. Formule de Stokes holomorphe-antiholomorphe.
Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact à bord C^1 par morceaux, f, g des fonctions C^1 définies au voisinage de K. Montrer que la formule de Stokes se réécrit :

$$\int_{\partial K} f(z)dz + g(z)d\overline{z} = 2i \int_K \left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dxdy$$

Exercice 2. Aires de polygones réguliers.
On désire calculer l'aire du n-gone régulier, c'est-à-dire l'enveloppe convexe dans $\mathbb{C}$ des racines n-èmes de l'unité. On note P_n le polygone, A_n son aire et on fixe $\zeta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

1. Donner les formules paramétrant les n segments $\gamma_1, ..., \gamma_n$ qui paramètrent le bord ∂P_n.

2. Montrer en utilisant la formule de Stokes que
$$A_n = \frac{1}{2i} \int_{\partial P_n} \overline{z} dz.$$

3. Démontrer que
$$\int_{\gamma_j} \overline{z} dz = i \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$
et conclure.

Exercice 3. Le théorème de la divergence.
On désire prouver, à partir de la formule de Stokes, le théorème de la divergence. Pour cet exercice, on note $\dot{f}$ la dérivée en t de f.
Théorème de la divergence.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ à bord C^1, U un voisinage de K et $\boldsymbol{F} : U \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs C^1. Alors :

$$\int_K \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) dxdy = \int_{\partial K} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds$$

où $\boldsymbol{\nu}$ est la normale sortante unitaire à ∂K et ds est l'élément de longueur de ∂K, c'est-à-dire $udx + vdy$ où (u, v) est un vecteur tangent au bord de K unitaire et positivement orienté.

1. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ un chemin C^1 de dérivée non-nulle qui paramétrise localement ∂K (avec la bonne orientation). Exprimer la normale sortante unitaire $\boldsymbol{\nu}$, le vecteur tangent unitaire, et les éléments de longueur dx, dy en fonction de $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ et dt.

2. Démontrer que $ds = |\dot{\gamma}(t)| dt$, puis que $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nu} ds = f dy - g dx$ où $\boldsymbol{F}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$.

3. Démontrer que
$$\int_K \mathrm{div}(\boldsymbol{F}) dxdy = \int_{\partial K} f dy - g dx$$
et conclure.

---

† Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

Exercice 4. La solution fondamentale du laplacien en dimension deux.
On désire démontrer l'égalité suivante : si $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ à support compact, alors :

$$\int_{\mathbb{C}} \Delta\varphi(z) \log|z| dxdy = 2\pi\varphi(0)$$

On définit l'ouvert $U_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < \varepsilon^{-1}\}$ et on pose T_ε le cercle de centre 0 et de rayon ε.

1. Justifier que l'intégrale converge.
2. Montrer que pour toute fonction C^∞ à support compact φ, on a
$$\int_{\mathbb{C}} \varphi(z) \log|z| dxdy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{U_\varepsilon} \varphi(z) \log|z| dxdy.$$
3. Montrer que sur un ouvert U à bord C^1 par morceaux, pour f, g fonctions C^2 au voisinage de l'adhérence de U, on a l'égalité
$$\frac{i}{2} \int_U \big[f(z)\Delta g(z) - \Delta f(z) g(z)\big] dxdy = \int_{\partial U} f(z)\partial g(z)dz + \overline{\partial} f(z) g(z) d\overline{z}.$$
4. Montrer que pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :
$$\int_{U_\varepsilon} \Delta\varphi(z) \log|z| dxdy = -2i \int_{T_\varepsilon} \varphi(z)\partial \log|z| dz + \overline{\partial}\varphi(z) \log|z| d\overline{z}.$$
5. Montrer $\partial \log|z| = \frac{1}{2z}$.
6. Estimer les intégrales
$$\int_0^{2\pi} \varphi(\varepsilon e^{it}) dt$$
et
$$\varepsilon \int_0^{2\pi} \overline{\partial}\varphi(\varepsilon e^{it}) \log(\varepsilon) e^{it} dt$$
quand $\varepsilon \to 0$ et conclure.

Applications du théorème de Cauchy

Exercice 5. Intégrales gaussiennes.

1. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. En intégrant sur un rectangle bien choisi, prouver que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$$
et en déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-i\xi x} dx = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2/4}.$$
2. En intégrant la fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ sur un secteur angulaire bien choisi, prouver la convergence de l'intégrale suivante (au sens faible) et la calculer :
$$\int_{\mathbb{R}} e^{it^2} dt.$$

Exercice 6. Intégrale le long d'une ellipse.
Soient $a, b > 0$. On considère la courbe γ donnée par l'équation $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

1. Démontrer que
$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi.$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)}.$$

Exercice 7. Encore une intégrale.
En intégrant $z \mapsto \frac{\log(z)}{1-z}$ sur le bord de $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant 1, |z| \geqslant \varepsilon\}$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos(\theta))d\theta.$$

Exercice 8. Primitives et logarithmes.

1. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a,\varepsilon)$. Démontrer que f admet une primitive, donnée par

$$F(z) = \int_a^z f(\zeta)d\zeta.$$

où l'intégrale est prise sur n'importe quel chemin de a à z dans le disque.

2. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert connexe, f une fonction holomorphe sur U. Supposons que pour γ chemin C^1 par morceaux dans U, la quantité $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ ne dépend que de $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Démontrer que

$$z \mapsto \int_a^z f(\zeta)d\zeta$$

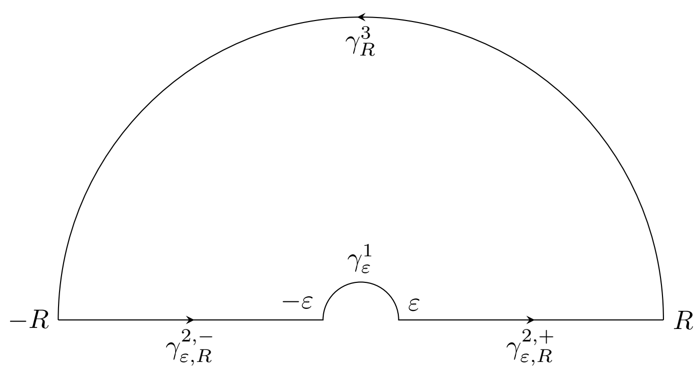
définit bien une fonction sur U, indépendamment du chemin de a à z choisi. Démontrer que cette fonction est holomorphe, de dérivée f.

3. En déduire qu'une fonction $f \in \mathcal{O}(U)$ admet une primitive si et seulement si $\int_\gamma f(\zeta)d\zeta$ ne dépend que des extrémités de γ.

4. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer que si une primitive L de f'/f existe, alors elle vérifie $e^{L(z)} = Af(z)$. pour un certain $A \in \mathbb{C}^*$.

5. Soit U simplement connexe, et $f \in \mathcal{O}(U)$ ne s'annulant pas. Démontrer qu'il existe $L \in \mathcal{O}(U)$ telle que $f(z) = e^{L(z)}$.

Exercice 9. L'intégrale de Dirichlet.
On définit un contour $\gamma_{\varepsilon,R}$ comme suit : $\gamma^1_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{i(\pi-t)}$ sur $[0,\pi]$, $\gamma^{2,\pm}_{\varepsilon,R}(t) = \pm t$ sur $[\varepsilon, R]$ et $\gamma^3_R(t) = Re^{it}$ sur $[0,\pi]$ (voir dessin).



1. Démontrer que $\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{-it}}dt \to \pi$ quand $\varepsilon \to 0$.

2. En minorant $\sin(t)$ par $2t/\pi$ sur $[0,\pi/2]$, démontrer que

$$\int_0^\pi e^{-R\sin(t)}dt = O\left(\frac{1}{R}\right).$$

3. En déduire que
$$\int_{\gamma^{2,-}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma^{2,+}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = -\int_{\gamma^{1}_{\varepsilon}} \frac{e^{iz}}{z} dz + O\left(\frac{1}{R}\right).$$
4. Démontrer que
$$\int_{\gamma^{2,-}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\gamma^{2,+}_{\varepsilon,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$
5. En déduire la valeur de
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Exercice 10. Transformées de Fourier à la Paley-Wiener.
Soit φ une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$ avec $A > 0$.

1. Démontrer que la transformée de Fourier
$$\hat{\varphi}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-izx} dx$$
est une fonction entière vérifiant l'estimation suivante : pour tout $N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, il existe une constante $C_N > 0$ telle que
$$|\hat{\varphi}(z)| \leqslant C_N (1 + |z|)^{-N} e^{A|\Im(z)|}$$
2. Soit à présent f une fonction entière qui vérifie l'estimation précédente. On va démontrer que sa transformée de Fourier est une fonction C^∞ à support compact inclus dans $[-A, A]$.
   (a) Démontrer que la transformée de Fourier de f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $x > 0$. Démontrer à l'aide de la formule de Cauchy que pour tout $T > 0$, on a :
$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z) e^{-ixz} dz = e^{-xT} \int_{\mathbb{R}} f(z - iT) e^{-ixz} dz.$$
   (c) En faisant tendre $T \to \infty$, démontrer que si $x > A$, alors $\hat{f}(x) = 0$ et conclure.